Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Problemas de Cálculo
Ejercicios de sucesiones y series de funciones

Javier Pérez

Directorio

Actualizado el 21 de abril de 2002

Versión Abril, 2002

Tabla de Contenidos

1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

1.1. Sucesiones de funciones

En estos ejercicios estudiamos los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Como sabes, el *campo de convergencia puntual* de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $C = \{x \in I : \{f_n(x)\}$ es convergente$\}$; y, supuesto que $C \neq \emptyset$, la *función límite puntual* de $\{f_n\}$ es la función $f : C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$ para todo $x \in C$. Se dice también que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en C.

Dado un intervalo $J \subseteq C$, sea $\beta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$. Entonces, si $\lim\{\beta_n\} = 0$, se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* J.

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J. La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse. Supongamos que el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces $\beta_n = |f_n(c_n) - f(c_n)|$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente en J si, y sólo si, $\lim\{\beta_n\} = 0$.

Ejercicio 1. Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos del tipo $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x) = n^2 x\, \mathrm{e}^{-nx}$.

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$

Ejercicio 3. Estudiar la convergencia uniforme en $[0, 1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x \in]0, 1]$ por $f_n(x) = x^n \log(1/x)$, y $f_n(0) = 0$.

Ejercicio 4. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $0 < \rho < 1$?

En los ejercicios anteriores hemos podido calcular el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en el intervalo donde estudiamos la convergencia uniforme (observa que las sucesiones estudiadas son de funciones positivas que convergen puntualmente a la función cero).

No siempre vamos a ser tan afortunados. Puede ocurrir que la derivada sea complicada y no podamos calcular de forma explícita sus ceros o que sea difícil estudiar la convergencia de la sucesión de los valores máximos de las funciones $|f_n(x) - f(x)|$.

Cuando esto ocurra no hay que olvidar que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J lo que interesa es saber si la sucesión

$$\beta_n = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$$

converge o no converge a cero. Para ello **no es imprescindible calcular el valor exacto** de β_n. Las siguientes dos estrategias son de gran utilidad.

• Si podemos probar una desigualdad del tipo

$$\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \alpha_n$$

donde $\lim\{\alpha_n\} = 0$ entonces es claro que también $\lim\{\beta_n\} = 0$.

• Si encontramos puntos $x_n \in J$ tales que la sucesión $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converja a cero, entonces, como evidentemente $\beta_n \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)|$, se sigue que tampoco $\{\beta_n\}$ converge a cero.

Ten en cuenta que con frecuencia la función límite puntual es la función cero lo que facilita las acotaciones.

Ejercicio 5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

Ejercicio 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

Ejercicio 7. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$.

Ejercicio 8. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por $f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Estudiar la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right)$$

1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

Recuerda que, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$. Es decir, $F_1 = f_1$, $F_2 = f_1 + f_2$, $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$, en general $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. Los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cuyas funciones f_n suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $C = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \ \text{ es convergente}\}$. La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto $A = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \ \text{ es convergente}\}$. El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

Criterio de Weierstrass. Sea $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones, A un conjunto y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $x \in A$ y para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, donde la serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A.

Ejercicio 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$$

Probar que la serie $\sum f_n$

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_0^+$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$ si $a > 1/2$.

Ejercicio 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = x^n(\log x)^2$, y $f_n(0) = 0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ y dedúzcase que

$$\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x}\,dx = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Ejercicio 12. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones $\sum f_n$ donde, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcular $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$ y $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$.

Sugerencia. Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_{k}^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}dt \leqslant f_k(x) = \int_{k}^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2}dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{x}{1+t^2x^2}dt$$

Ejercicio 13. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!}x^n \mathrm{e}^{-nx} \quad (x \geqslant 0)$$

1.3. Series de potencias

Ejercicio 14. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Ejercicio 15. Dado un número natural $q\in\mathbb{N}$, probar la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}$$

y obtener el valor de la suma de las series correspondientes a los valores de $q=1,2,3$.

Ejercicio 16. Calcular la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}$.

Ejercicio 17. Expresar la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1}nx^{n-1}$, y $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y deducir el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

Ejercicio 18. Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n;\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n$$

Ejercicio 19. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deducir el valor de las sumas de las series

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}\quad \text{y}\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$$

Ejercicio 20. Probar que las funciones definidas por:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\ g(0)=1,\qquad f(x)=\frac{e^x-1}{x},\ f(0)=1$$
$$h(x)=\frac{\cos x-1}{x^2},\ h(0)=-1/2,\quad \varphi(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\ \varphi(0)=1$$

son de clase C^{∞} en su intervalo natural de definición.

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1.

$f_n(0)=0$, y si $x>0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\lim_{n\to\infty} n^2(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^k\lambda^n$ donde $0<\lambda<1$). Por tanto, la función límite puntal, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $f_n(x)\geqslant 0$, por lo que

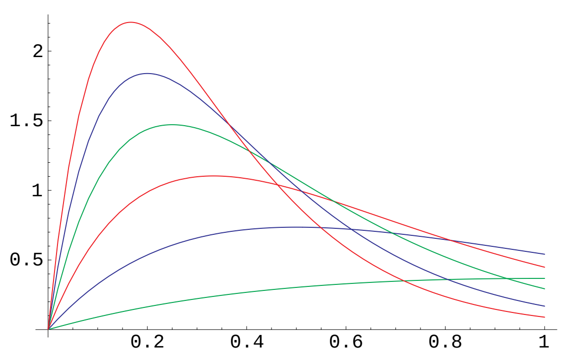
$$|f_n(x)-f(x)| = f_n(x)$$

Como $f_n'(x) = n^2\,\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$, se deduce que $f_n'(x)>0$ para $0\leqslant x<1/n$, y $f_n'(x)<0$ para $x>1/n$. Luego $f_n(x)\leqslant f_n(1/n)$ para todo $x\geqslant 0$. Deducimos que

$$f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x\in\mathbb{R}_o^+\}$$

y como $f_n(1/n) = n/e$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a,+\infty[$, con $a>0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente en el intervalo $[1/n,+\infty[$. Sea n_o un número natural tal que $\frac{1}{n_o}<a$. Entonces, para todo $n\geqslant n_o$, tenemos que $[a,+\infty[\subseteq[1/n,+\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x\in[a,+\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\}=0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,+\infty[$.



La sucesión $f_n(x) = n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}$

Como información adicional, comprueba que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1-(1+n)\,\mathrm{e}^{-n}$$

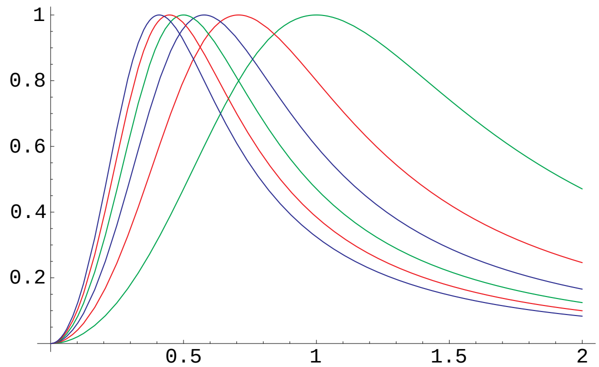
y, por tanto

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$$

◀

Ejercicio 2.

Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como $f_n'(x)=4nx\dfrac{1-n^2x^4}{(1+n^2x^4)^2}$, tenemos que $f_n'(1/\sqrt{n})=0$, $f_n'(x)>0$ para $0<x<1/\sqrt{n}$ y $f_n'(x)<0$ para $x>1/\sqrt{n}$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0,1/\sqrt{n}]$ y estrictamente decreciente en $[1/\sqrt{n},+\infty[$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $\mathbb{R}_o^+$ en el punto $x_n=1/\sqrt{n}$.



La sucesión $f_n(x)=\dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}$

Dado un número $a>0$ sea n_0 tal que $x_{n_0}<a$. Para todo $n\geqslant n_0$ tenemos que $x_n<a$, y por tanto

$$\max\{f_n(x):0\leqslant x\leqslant a\}=f_n(x_n)=1,\quad \max\{f_n(x):x\geqslant a\}=f_n(a)$$

Como $\lim\{f_n(a)\}=0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,+\infty[$ pero, evidentemente, no converge uniformemente en $[0,a]$.

◀

Ejercicio 3.

Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como $f_n'(x)=-\big(n\log x+1\big)x^{n-1}$ tenemos que $f_n'(x)=0$ si, y sólo si, $\log x=-1/n$, es decir, $x=\mathrm{e}^{-1/n}$. Además $f_n'(x)>0$ para $0<x<\mathrm{e}^{-1/n}$ y $f_n'(x)<0$ para $\mathrm{e}^{-1/n}<x\leqslant 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $]0,\mathrm{e}^{-1/n}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e}^{-1/n},1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto $x_n=\mathrm{e}^{-1/n}$. Por tanto

$$\max\{f_n(x):x\in]0,1]\}=f_n(\mathrm{e}^{-1/n})=\frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ ◀

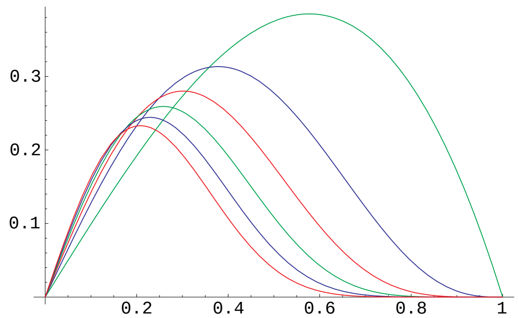
Ejercicio 4.

Observa que $f_n(0)=f_n(1)=0$ y, si $0<x<1$, la sucesión $\{n^\alpha(1-x^2)^n\}$ es de la forma $\{n^\alpha\lambda^n\}$ con $0<\lambda<1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Por tanto, en el intervalo $[0,1]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero.

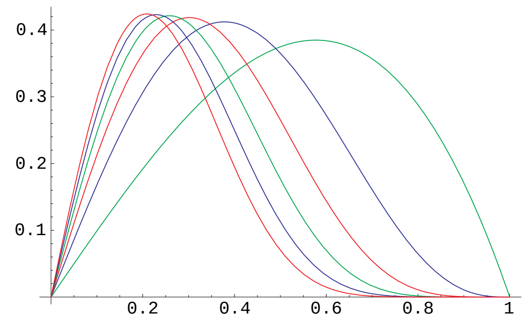
Tenemos que

$$f_n'(x)=n^\alpha(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Pongamos $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Entonces $f_n'(x_n)=0$, $f_n'(x)>0$ para $0<x<x_n$ y $f_n'(x)<0$ para $x_n<x<1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0,x_n]$ y estrictamente decreciente en $[x_n,1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto x_n.



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/4$



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que $\lim\{f_n(x_n)\}=0$ si, y sólo si, $\alpha<1/2$. Pot tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ si, y sólo si, $\alpha<1/2$.

Dado $0<\rho<1$, sea n_0 tal que $x_{n_0}<\rho$. Para todo $n\geqslant n_0$ tenemos que $x_n<\rho$ y por tanto $\max\{f_n(x):\rho\leqslant x\leqslant 1\}=f_n(\rho)\to 0$ por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho,1]$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$. ◀

Ejercicio 5. Es claro que $f_n(0)=f_n(\pi/2)=0$ y para $0<x<\pi/2$ la sucesión $\{n(\cos x)^n\}$ es de la forma $\{n\lambda^n\}$ con $0<\lambda<1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Por tanto, en el intervalo $[0,\pi/2]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Observa también que $f_n(x)\geqslant 0$ para todo $x\in[0,\pi/2]$.

Intentemos calcular el máximo absoluto de $f_n(x)$ en $[0,\pi/2]$. Tenemos que

$$f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x)-n\,\mathrm{sen}^2(x))$$

Sea $x_n\in]0,\pi/2[$ tal que $\cos^2(x_n)-n\,\mathrm{sen}^2(x_n)=0$. Como f_n es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que f_n alcanza su mayor valor en $[0,\pi/2]$ en el punto x_n. Observa que $x_n=\sqrt{\operatorname{arc\,tg}(1/n)}\to 0$.

Tenemos que

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n\,\mathrm{sen}(x_n)$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos $f_n(x_n)=y_nz_n$ donde $y_n=n\,\mathrm{sen}(x_n)$, $z_n=(\cos(x_n))^n$. Entonces

$$y_n = nx_n\frac{\mathrm{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n}\sqrt{n\operatorname{arc\,tg}(1/n)}\frac{\mathrm{sen}(x_n)}{x_n}$$

y como $\dfrac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \to 1$ y $n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to 1$, se sigue que $y_n \to +\infty$ (de hecho, se tiene que y_n es asintóticamente equivalente a $\sqrt{n}$, esto es, $y_n \sim \sqrt{n}$).

Por otra parte, tenemos que

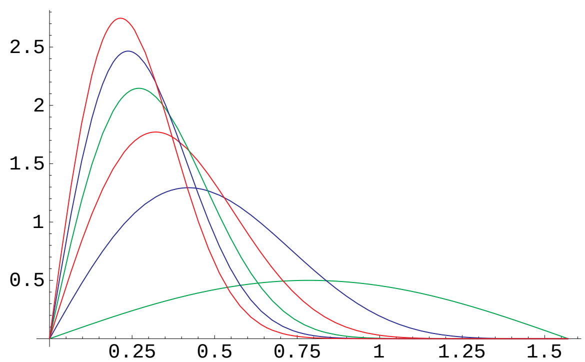
$$\log(z_n) = n\log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n)-1) \sim n\frac{-1}{2}x_n^2 = \frac{-1}{2}n\operatorname{arc\,tg}(1/n) \to \frac{-1}{2}$$

Por tanto $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$. Deducimos así que $f_n(x_n) = y_n z_n \to +\infty$.

Dado un número $0 < a < \pi/2$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) \qquad \text{máx}\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant \pi/2\} = f_n(a)$$

Como $\{f_n(x_n)\}$ no converge a 0 se sigue que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0,a]$. Como $\{f_n(a)\} \to 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,\pi/2]$



La sucesión $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de f_n, acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en $[a,\pi/2]$, pues como la función coseno es decreciente en $[0,\pi/2]$ y $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, se tiene que

$$0 \leqslant f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x \leqslant n(\cos a)^n$$

para todo $x \in [a,\pi/2]$. Puesto que la sucesión $\{n(\cos a)^n\} \to 0$ (es de la forma $n\lambda^n$ con $0 < \lambda < 1$) concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,\pi/2]$.

La situación es distinta en el intervalo $[0,a]$. Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos $u_n = 1/n$. Tenemos que

$$f_n(1/n) = n\operatorname{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n$$

y como $\{n\operatorname{sen}(1/n)\} \to 1$ y

$$\text{lím}\{(\cos(1/n))^n\} = \exp\left(\text{lím}\{n(\cos(1/n)-1)\}\right) = \exp(0) = 1$$

obtenemos que $\{f_n(1/n)\} \to 1$. Como, para todo $n > 1/a$ se verifica que $0 < 1/n < a$, resulta que

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} \geqslant f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[0,a]$. ◀

Ejercicio 6. Evidentemente $\lim\{f_n(x)\} = 0$. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]0,\pi[$. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma $]0,a]$ tomemos $x_n = 1/n$. Como

$$f_n(1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(1)}{n\operatorname{sen}(1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $]0,a]$.

Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi - 1)}{n\operatorname{sen}(\pi - 1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $[a,\pi[$.

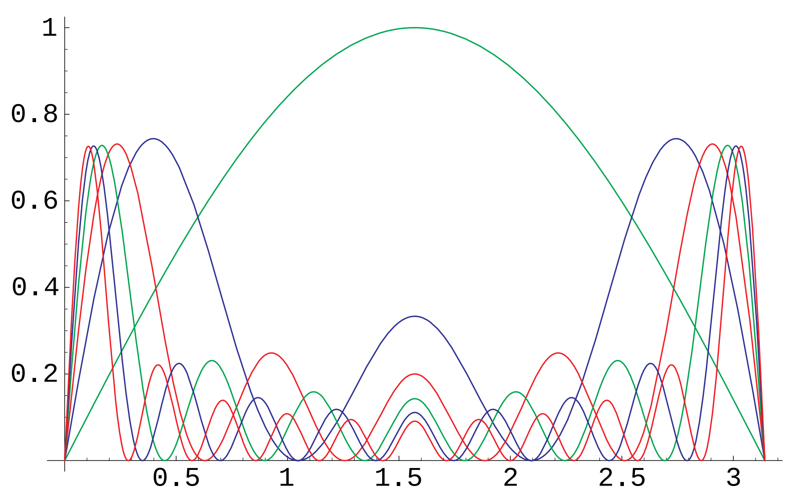
Finalmente, sea $0 < a < b < \pi$. Como $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in [a,b]$ y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto $x_o \in [a,b]$ tal que $\operatorname{sen} x_o \leqslant \operatorname{sen} x$ para todo $x \in [a,b]$, deducimos que

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{n\operatorname{sen}(x_o)}$$

y por tanto

$$\text{máx}\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant b\} \leqslant \frac{1}{n\operatorname{sen}(x_o)}$$

Ya que, evidentemente, $\{1/n\operatorname{sen}(x_o)\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,b]$.



La sucesión $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n\operatorname{sen} x}$

◀

Ejercicio 7.

Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

• Si $|x|<1$, entonces $1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant 1+x^{2n}$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\}=1$.

• Si $|x|\geqslant 1$, entonces $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant 2^{1/n}x^2$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\}=x^2$.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x)=\lim\{f_n(x)\}=\begin{cases} 1, & \text{si } |x|<1\\ x^2, & \text{si } |x|\geqslant 1\end{cases}$$

Tenemos que

• Si $|x|<1$ es

$$0\leqslant f_n(x)-f(x)=\sqrt[n]{1+x^{2n}}\,-1\leqslant 2^{1/n}-1$$

• Si $|x|\geqslant 1$ es

$$0\leqslant f_n(x)-f(x)=\sqrt[n]{1+x^{2n}}-x^2=x^2\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}}\,-1\right) \tag{1}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t)=\sqrt[n]{1+t}$ en el intervalo $[0,s]$ obtenemos que $\dfrac{h(s)-h(0)}{s}=h'(c)$ donde c es algún punto del intervalo $]0,s[$. Como

$$h'(c)=\frac{1}{n}(1+c)^{1/n-1}\leqslant\frac{1}{n}$$

se sigue que $h(s)-h(0)=sh'(c)\leqslant\dfrac{s}{n}$. Tomando $s=\dfrac{1}{x^{2n}}$ resulta que

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}}\,-1=h(1/x^{2n})-h(0)\leqslant\frac{1}{nx^{2n}}\leqslant\frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (1) que $0\leqslant f_n(x)-f(x)\leqslant\dfrac{1}{n}$.

Finalmente

$$\max\{|f_n(x)-f(x)|:x\in\mathbb{R}\}\leqslant\max\left\{2^{1/n}-1,1/n\right\}$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones f_n son derivables en $\mathbb{R}$, la función límite, f, no es derivable en $x=1$. ◀

Ejercicio 8.

Definamos la función

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \varphi(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}\quad(t\neq 0),\quad \varphi(0)=1$$

Con ello, tenemos que $f_n(x)=x\varphi(x/n)$ y, como $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=1$, deducimos que la función límite viene dada por

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=x\qquad(x\in\mathbb{R})$$

Dado $a > 0$, es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en $[a,+\infty[$, pues para todo $n \geqslant a$ se tiene que

$$\text{máx}\{|f(x)-f_n(x)| : x \geqslant a\} \geqslant f(n)-f_n(n) = n(1-\operatorname{sen}(1)) \to +\infty$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en $]-\infty,-a]$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $[-a,a]$. Para todo $x \in [-a,a]$ tenemos que

$$|f(x)-f_n(x)| = |x-x\varphi(x/n)| = |x||1-\varphi(x/n)| \leqslant a|1-\varphi(x/n)|$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|1-\varphi(t)| < \varepsilon/a$ siempre que $|t| < \delta$. Tomemos un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \delta/a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [-a,a]$ se tiene que $|x/n| \leqslant a/n \leqslant a/n_0 < \delta$ por lo que

$$|f(x)-f_n(x)| \leqslant a|1-\varphi(x/n)| < \varepsilon$$

y por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es $\text{máx}\{|f(x)-f_n(x)| : x \in [-a,a]\} < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-a,a]$. ◀

Ejercicio 9.

Como $f_n(0) = \operatorname{arctg} n$, y $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$, la función límite viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{si } x > 0 \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en $\mathbb{R}_o^+$. Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Para ello es conveniente conocer el signo de la función $f_n(x)-f(x)$. Teniendo en cuenta que la función arcotangente es inyectiva, se deduce que $f_n(x)-f(x) = 0$ si, y sólo si, $(n+x)/(1+nx) = 1/x$ lo que equivale a $x = 1$ (la otra posibilidad $x = -1$ se descarta porque suponemos que $x > 0$). En consecuencia, la función $f_n(x)-f(x)$ debe tener signo constante en cada intervalo $[0,1[$ y en $]1,+\infty[$. Como

$$f_n(0)-f(0) = \operatorname{arctg} n - \pi/2 < 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n) > 0$$

se sigue que $f_n(x)-f(x) < 0$ para $x \in [0,1[$, y $f_n(x)-f(x) > 0$ para $x > 1$.

Estudiemos ahora la derivada de $f_n(x)-f(x)$. Un cálculo sencillo nos da

$$f_n'(x)-f'(x) = 2\frac{1+2nx+x^2}{(1+x^2)((1+n^2)x^2+4nx+1+n^2)}$$

por tanto $f_n'(x)-f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. En consecuencia $f_n - f$ es una función creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Como

$$|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} f(x)-f_n(x), & \text{si } x \in [0,1] \\ f_n(x)-f(x), & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Resulta que la función $|f_n - f|$ es decreciente en $[0,1]$ y creciente en $[1,+\infty[$. Concluimos que

$$|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} f(x)-f_n(x) \leqslant f(0)-f_n(0) = \pi/2 - \operatorname{arctg} n, & \text{si } x \in [0,1] \\ f_n(x)-f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n), & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Por tanto, *para todo* $x \geqslant 0$, es

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \beta_n = \text{máx}\{\pi/2 - \operatorname{arc\,tg} n, \operatorname{arc\,tg}(1/n)\}$$

y como $\{\beta_n\} \to 0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ◀

Ejercicio 10. a) Como se pide estudiar la convergencia en $\mathbb{R}_o^+$, consideraremos en lo que sigue que $x \geqslant 0$. La serie $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{x}{n^a(1+nx^2)}$ es de términos positivos y, para $x > 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+a} \frac{x}{n^a(1+nx^2)} = \frac{1}{x}$$

Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si $1+a > 1$, es decir $a > 0$.

Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo $[\rho, +\infty[$, $(\rho > 0)$. Como

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1 - x^2 n}{(1+nx^2)^2}$$

se deduce fácilmente que f_n es creciente en $[0, 1/\sqrt{n}]$ y decreciente en $[1/\sqrt{n}, +\infty[$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/\sqrt{n} < \rho$ por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, por tanto, $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \geqslant \rho$. Puesto que, para $a > 0$, la serie $\sum f_n(\rho)$ converge, se sigue, por el criterio de Weierstrass, que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

b) Si $a > 1/2$ entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n(1/\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2} \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{a+1/2}}$ es convergente (es una serie de Riemann con exponente $a + 1/2 > 1$). Como para todo $x \geqslant 0$ es $f_n(x) \leqslant f_n(1/\sqrt{n})$, el criterio de Weierstrass implica que la $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ◀

Ejercicio 11. Observa que f_n es continua y positiva en $[0,1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f_n'(x) = (n \log x + 2)x^{n-1} \log x$, se sigue que en el punto $c_n = \exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0,1]$. Luego $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(c_n) = \mathrm{e}^{-2}\, 4/n^2$ y, puesto que la serie $\sum \dfrac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$. En consecuencia, se verificará que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x}, \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{2}{(n+1)^3}$$

(compruébalo integrando por partes), resulta la igualdad del enunciado. ◀

Ejercicio 12. Puesto que, para $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{|x|}$$

se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|x|}{1+n^2x^2}$ es convergente. También converge, evidentemente, para $x = 0$.

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

y deducimos que f_n es creciente en $[0,1/n]$ y decreciente en $[1/n,+\infty[$. Como $f_n(-x) = -f_n(x)$, deducimos que $|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = 1/2n$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Como la serie $\sum 1/2n$ no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la convergencia uniforme de la serie *en todo* $\mathbb{R}$ (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no *necesarias* para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio si nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma $A_\rho = \{x\in\mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$, donde $\rho > 0$. Pues, tomando n_0 tal que $1/n_0 < \rho$, para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/n < \rho$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho,+\infty[$ y, en consecuencia $|f_n(x)| \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x\in A_\rho$. Puesto que la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ.

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma $[-\rho,\rho]$ con $\rho > 0$ (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo $\mathbb{R}$). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ de la función suma de la serie. Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto $x > 0$, que

$$\begin{aligned}
\int_0^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2}\,dt = \\
&= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{1+k^2x^2} \leqslant \\
&\leqslant x + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt = x + \int_0^n \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt
\end{aligned}$$

deducimos que $\operatorname{arc\,tg}((n+1)x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leqslant x + \operatorname{arc\,tg}(nx)$. Tomando límites para $n \to \infty$ en esta desigualdad obtenemos $\pi/2 \leqslant F(x) \leqslant \pi/2 + x$. Como esta desigualdad es válida para todo $x > 0$, se sigue que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \pi/2$. Como $F(-x) = -F(x)$, se deduce que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = -\pi/2$. Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Como las funciones f_n son continuas en $\mathbb{R}$ deducimos que la serie $\sum f_n$ no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma $[-\rho,\rho]$ con $\rho > 0$ pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en $x = 0$ lo que acabamos de probar que no es cierto.

Fíjate en que la función F sí es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pues cualquier número $a \neq 0$ podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto A_ρ, sin más que tomar $\rho < |a|$, y como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ, la función suma, F, es continua en A_ρ y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que F es continua en a.

◀

Ejercicio 13.
Estudiemos la convergencia puntual. Para $x > 0$ la serie $\sum f_n(x)$ es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{n+1}}x\,\mathrm{e}^{-x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} x\,\mathrm{e}^{-x} \to x\,\mathrm{e}^{1-x}$$

Consideremos la función $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$. Se tiene que $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$ y, fácilmente, se deduce que φ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+|\infty[$. Luego para $x > 0$, $x \neq 1$ se tiene que $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$. Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número real positivo $x \neq 1$. En este caso el criterio del cociente también proporciona información para $x = 1$, pues aunque

$$\text{lím}\,\frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} = \text{lím}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{-1} = 1$$

como la sucesión $(1+1/n)^{n+1}$ es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que* 1, es decir $\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} \geqslant 1$, lo que claramente implica que $\{f_n(1)\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum f_n(1)$ no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiemos la convergencia uniforme. Tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{n^{n+1}}{n!}nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}(1-x)$$

Y, al igual que antes, se sigue que f_n es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Dado $\rho > 1$, para todo $x \geqslant \rho$ es $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ y como la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$. Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,\rho]$ donde $0 < \rho < 1$.

◀

Ejercicio 14.
Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Puesto que:

$$\frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \to |x|^2$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2 < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Deducimos así que $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ la función suma de la serie: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia. Por tanto, para $-1<x<1$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, y

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}2\,(x^2)^n=\frac{2}{1-x^2}$$

Puesto que $f(0)=f'(0)=0$, deducimos que

$$f'(x)=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}dt=\log(1+x)-\log(1-x)$$

y, por tanto

$$f(x)=\int_0^x(\log(1+t)-\log(1-t))\,dt=(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x) \qquad (x\in]-1,1[)$$

◀

Ejercicio 15.
Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k=\frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u}$$

Hagamos $u=x^q$ para obtener

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{qk}=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}$$

Integrando esta igualdad en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^q}\,dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{qk+1}+\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,dx$$

Tomando ahora límites para $n \to \infty$, y teniendo en cuenta que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} \, dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} \right| dx \leqslant \int_0^1 x^{qn+q} dx = \frac{1}{qn+q+1}$$

obtenemos la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^q)^n \qquad (|x| < 1)$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo $0 < t < 1$ es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{qn} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} \qquad (1)$$

Ahora, la serie $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{t^{qn+1}}{qn+1}$, es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $]-1,1[$ y que, en virtud del criterio de Leibnitz para series alternadas, converge para $t = 1$. En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$ y por tanto

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{qn+1}$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{1}{1+x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx$$

Deducimos, por (1), que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{qn+1}$$

◀

Ejercicio 16.
Sea
$$f(t)=\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n \qquad (-1<t<1)$$
Tenemos que
$$t\,f'(t)=\frac{t}{(1-t)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n \qquad (-1<t<1)$$
Haciendo en estas igualdades $t=x^3/2$, supuesto que $-1<x^3/2<1$, deducimos que
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x^3}{2}\right)^n=\frac{1}{1-x^3/2}+\frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2}=\frac{4}{(x^3-2)^2}$$
Análogamente, haciendo $t=(x+3)/2$, supuesto que $-1<(x+3)/2<1$, obtenemos
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x+3}{2}\right)^n=\frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2}=2\frac{3+x}{(5+x)^2}$$

◀

Ejercicio 17.
Sea $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, donde $-1<x<1$. Entonces
$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \qquad (-1<x<1)$$
También
$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad (-1<x<1)$$
Integrando esta igualdad obtenemos
$$\int_0^x\frac{t}{(1-t)^2}dx=\frac{x}{1-x}+\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1} \quad (-1<x<1)$$
Y deducimos que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1<x<1)$$
En particular, haciendo en esta igualdad $x=1/2$ resulta que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}=2-2\log 2$$

◀

Ejercicio 18.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n, es decir, $R(n) = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues

$$\frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en n que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para $n \to \infty$ es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum \dfrac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{P(n)} = \frac{P(n+1)}{P(n)}\frac{1}{n+1}$$

y basta notar que, evidentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} P(n+1)/P(n) = 1$.

Teniendo en cuenta que $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ se sigue que las series primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia $+\infty$.

Para calcular la suma de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3+n+3}{n+1}x^n$ lo más fácil es expresar n^3+n+3 en potencias de $n+1$. Para ello basta expresar el polinomio $P(x) = x^3+x+3$ por medio de su desarrollo de Taylor centrado en $x=-1$. Como $P(-x) = -P(x)$ la derivada segunda de P en $x=0$ es cero. Tenemos así que

$$x^3+x+3 = P(-1)+P'(-1)(x+1)+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 = 1+4(x+1)+(x+1)^3$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+4+(n+1)^2\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+5)x^n$$

La serie $\sum x^n/(n+1)$ se obtiene integrando la serie geométrica $\sum x^n$ y dividiendo por x, de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = -\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1<x<1)$$

La suma de la serie $\sum(n^2+2n+5)x^n$ puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que es general para sumar series del tipo $\sum Q(n)x^n$ donde $Q(n)$ es un polinomio en n.

En nuestro caso $Q(n)=n^2+2n+5$. Observa que $Q(n+1)-Q(n)=3+2n$, por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} Q(k)x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^{n}\big(Q(k)x^k-Q(k)x^{k+1}\big)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\big(Q(k+1)-Q(x)\big)x^{k+1}+Q(0)-Q(n)x^{n+1}=\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(3+2k)x^{k+1}+5-Q(n)x^{n+1}\end{aligned}$$

Tomando límites para $n\to\infty$ en esta igualdad, teniendo en cuenta que para $-1<x<1$ es $\lim\limits_{n\to\infty} Q(n)x^{n+1}=0$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x}+\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(3+2n)x^{n+1}=\\ &= \frac{5}{1-x}+\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\\ &= \frac{5}{1-x}+\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n=-\frac{\log(1-x)}{x}+\frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3}\qquad(-1<x<1)$$

La suma de la tercera serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n=\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n(n+1)}x^n$ puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n y que consiste en descomponer $R(n)$ en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n)=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\log(1-x)$, se obtiene fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}x^n=-2\log(1-x)+2\frac{\log(1-x)+x}{x}$$

Para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n$, usaremos que $\displaystyle\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. La idea consiste en escribir el polinomio como $n^3=n(n-1)(n-2)+An(n-1)+Bn+C$. Identificando coeficientes resulta $A=3,B=1,C=0$. Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!}x^n=\\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(n-1)!}x^n=(x^3+3x^2+x)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo $\sum \dfrac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es un polinomio.

◀

Ejercicio 19.
Observa que el intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(2n+1)}x^n$ es el intervalo $]-1,1[$ y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la función suma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función f es continua en $[-1,1]$.

Nota Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo $[-1,1]$; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en $[-1,1]$ y, por tanto, la función f es continua en $[-1,1]$.

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de potencias, sabemos que la función f es indefinidamente derivable en el intervalo $]-1,1[$ y

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

es decir

$$xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

La forma que tiene f' nos sugiere considerar la función

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1<x<1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

Como $g(0)=0$, deducimos que

$$g(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\log(1-x)$$

Ahora relacionaremos f' con g. Para $0<x<1$ tenemos que

$$g(\sqrt{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\sqrt{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sqrt{x}+x\sqrt{x}f'(x)$$

De donde

$$f'(x)=\frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\log(1+\sqrt{x})-\log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x} \qquad (0<x<1)$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de f en $]0,1[$ viene dada por

$$h(x)=\frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\qquad(0<x<1)$$

Deducimos que

$$f(x)=h(x)-\lim_{x\to 0}h(x)=2+h(x)\qquad(0\leqslant x<1)$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1}f(x)=2-\lim_{x\to 1}h(x)=2-2\log 2$$

Consideremos ahora que $-1<x<0$. Tenemos

$$xf'(x)=-|x|f'(-|x|)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}|x|^n\qquad(-1<x<0)$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad(-1<x<1)$$

Como

$$\varphi'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=-\frac{1}{1+x^2}$$

y $\varphi(0)=0$, deducimos que

$$\varphi(x)=-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=-\operatorname{arc\,tg}x$$

Al igual que antes deducimos que

$$f'(x)=\frac{\sqrt{-x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}}\qquad(-1<x<0)$$

o lo que es igual

$$-f'(-x)=\frac{\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\qquad(0<x<1)$$

Como $-f'(-x)$ es la derivada de la función $x\mapsto f(-x)$, integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función $x\mapsto f(-x)$ en $]0,1[$ es

$$H(x)=2\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\log(1+x)\qquad(0<x<1)$$

Deducimos que

$$f(-x)=H(x)-\lim_{x\to 0}H(x)=H(x)-2\qquad(0\leqslant x<1)$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1}f(-x)=\lim_{x\to 1}H(x)-2=\frac{\pi}{2}+\log 2-2$$

◀

Ejercicio 20.
Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$, con radio de convergencia no nulo. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y sea $F: I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ la función suma. En virtud del teorema de derivación para series de potencias, sabemos que la función F es de clase C^∞ en I. Sea ahora $q \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $G: I \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \frac{F(x) - \sum_{k=0}^{q} c_k(x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a) = c_{q+1}$$

Es evidente que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \qquad x \in I$$

Por tanto, la función G *es la suma de una serie de potencias* en el intervalo I y, por tanto, G es de clase C^∞ en I.

Teniendo en cuenta que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

Se sigue que las funciones g, f, h son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y la función φ es de clase C^∞ en $]-1,1[$. Pero es evidente que φ es de clase C^∞ en $]1/2,+\infty[$, luego φ es de clase C^∞ en $]-1,+\infty[$. ◄